Природа математики в оптике когнитивных исследований*

© 2020 г. В.А. Бажанов

Лаборатория «Кантианская рациональность», Академия Кантиана, Институт гуманитарных наук, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, 236016, ул. А. Невского, д. 14; Ульяновский государственный университет, Ульяновск, 432017, ул. Л. Толстого, д. 42.

E-mail: vbazhanov@yandex.ru

Поступила 11.04.2020

В статье предпринимается попытка пролить свет на источники математики как науки, ее концептуальный фундамент и «несущие» конструкции. Показывается, что исходная точка развития математики относится к феномену «чувства числа» (numerosity, процедура субитации), благодаря которому у живых существ возникает возможность симультанно воспринимать и различать небольшие количества предметов. У человека функционируют две когнитивные системы, связанные с математическими способностями, одна из которых предполагает приближенную и несимволическую оценку количеств, а другая символьный и языковой формат представления числовой информации. Сложные математические конструкции строятся на базисе простейших операций, которые обеспечиваются этими системами. Проводится мысль о том, что ряд эмпирических фактов, обнаруженных в современной нейронауке, касается продолжительной дискуссии между реализмом (платонизмом) и антиреализмом (номинализмом) в философии математики. Эта дискуссия непосредственно затрагивает природу и основания математического знания. Особенности математического познания становятся целью эмпирических исследований в нейронауке, а полученные результаты говорят о перспективности понимания природы математики в духе антиреализма (формирование базисных математических понятий в контексте человеческой деятельности). Обосновывается ключевая роль культуры в становлении и развитии математического мышления, которое оказывает обратное существенное влияние на прогресс культуры. Указывается на важность осмысления «чувства числа» как фундамента математического познания в терминах кантианской исследовательской программы в современной нейронауке и представлений, близких к интуиционизму Л.Э.Я. Брауэра.

Ключевые слова: когнитивные исследования, математика, «чувство числа», субитация, язык, символьная информация, культура, деятельность.

DOI: 10.21146/0042–8744–2020–11-87-96

Цитирование: *Бажанов В.А.* Природа математики в оптике когнитивных исследований // Вопросы философии. 2020. № 11. С. 87–96.

* Данное исследование проведено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № 075–15–2019–1929 «Кантианская рациональность и ее потенциал в современной науке, технологиях и социальных институтах», реализуемый на базе Балтийского федерального университета им. И. Канта (Калининград).

Nature of Mathematics through the Lens of Cognitive Research*

Valentin A. Bazhanov

Kantian Rationality Lab & Academia Kantiana, Immanuel Kant Baltic Federal University (IKBFU), 14, Aleksandra Nevskogo str., Kaliningrad, 236016, Russian Federation; Ulyanovsk State University, 42, Leo Tolstoy str., Ulyanovsk, 432017, Russian Federation.

E-mail: vbazhanov@yandex.ru

Received 11.04.2020

The article has the goal to shed light on the sources of mathematics as a science, its conceptual foundation and “scaffolding” constructions. We claim that the starting point of the development of mathematics refers to the phenomenon of “numerosity”, which enables living beings instantly perceive and distinguish small quantities of objects. A person has two cognitive systems associated with mathematical abilities, one of which involves an approximate and non-symbolical evaluation of quantities, and another symbolic and linguistic format for presenting digital information. Complex mathematical structures formed as the result of the simplest operations that provided by these systems. Quite a number of empirical facts revealed in modern neuroscience relate to a durable discussion between Realism (Platonism) and Anti-Realism (Nominalism) in the philosophy of mathematics. This discussion has a direct impact on the comprehension of nature and foundations of mathematical knowledge. The results of empirical studies in the neuroscience of the traits of mathematical cognition speak in favor of understanding the nature of mathematics in the line of Anti-Realism, which insists on the emergence and making of basic mathematical concepts within the context of human activity. The author stress the key role of culture in the emergence and development of mathematical thinking, which has the opposite significant effect on the progress of culture. The importance of comprehension of the “sense of number” phenomenon a foundation of mathematical knowledge in terms of the Kantian research program in modern neuroscience and ideas close to intuitionism of L.E.J. Brouwer stressed.

***Keywords*:** cognitive research, mathematics, “sense of number”, subitizing, language, symbolic information, culture, activity.

DOI: 10.21146/0042–8744–2020–11-87-96

Citation: Bazhanov, Valentin A. (2020) “Nature of Mathematics through the Lens of Cognitive Research”, *Voprosy Filosofii*, Vol. 11 (2020), pp. 87–96.

---

* This research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation grant, project No. 075–15–2019–1929 “Kantian Rationality and Its Impact in Contemporary Science, Technology, and Social Institutions” provided at the Immanuel Kant Baltic Federal University (IKBFU), Kaliningrad.

Светлой памяти
Михаила Михайловича Новоселова
(14.11.1932–28.03.2019)

Взгляды на природу математической реальности располагаются между двумя крайностями – реализмом (часто называемым платонизмом), утверждающим, что математические конструкции существуют вне и независимо от человеческого сознания в некоторой «трансцендентной», малодоступной непосредственному восприятию реальности, и антиреализмом (близкому по своим установкам номинализму), согласно которому математические структуры и объекты являются творческими продуктами человеческого воображения. В первом случае человеческое сознание, подобно путешественнику, открывает новые математические «земли», во втором же – воображение, подобно инженеру, планирует и возводит новые математические конструкции, требующие новых понятий и принципов их организации [Бажанов 2014]. Интенсивное развитие когнитивных исследований позволяет внести некоторую ясность в многолетнюю дискуссию реализма и антиреализма и дать наиболее правдоподобный ответ на вопросы о том: 1) что же выступает источником развития математики как науки? 2) на каком основании строится здание математики? 3) какие факторы определяют его «несущие» конструкции?

Природа математики, основания математического творчества, феномен числа и другие проблемы философии математики активно обсуждаются под углом зрения современной нейронауки [Dehaene, Brannon (eds.) 2011; Leibovich et al. 2017, 4–5; Burr 2017, 18]. Эти вопросы привлекают внимание самых различных направлений в контексте когнитивных исследований. Так, концепция энактивизма [Князева 2014] уже два десятка лет тому назад обрисовала некоторый общий подход к проблеме происхождения математики: «Математика, которую мы знаем, структурирована и лимитирована свойствами человеческого мозга и психики, – констатировали Дж. Лакофф и Р. Нуньес еще в 2000 г. – Единственная математика, которую мы знаем или вообще можем знать, – связана с нашим мозгом и сознанием» [Лакофф, Нуньес 2012, 29]. Сторонники энактивизма считают, что «объективная математика» в смысле Геделя – в виде той самой «трансцендентной» реальности – не существует; можно говорить лишь о существовании «субъективной математики» – фактически, в духе антиреализма. Впрочем, аналогичные суждения принадлежат и активно работающим математикам, которые добились выдающихся результатов. Так, один из крупнейших математиков современности М. Атья был склонен утверждать, что «абстрактное понятие величины (способность отличать меньшее от большего) имеет корреляты в самом мозге и, таким образом, оно носит врожденный характер» [Atiyah 2008, 1157]. Это означает, что в конечном счете основания математического творчества следует искать в активности некоторых нейроструктур, ответственных за человеческие способности к воображению и абстрактному мышлению.

Категоричные суждения о невозможности «объективной математики», впрочем, вызывают возражения, поскольку вряд ли допустимо в категоричной манере смешивать «идеальное» (математическую реальность в духе Платона) и возможные способы его репрезентации [Voorhees 2004, 86]. Впрочем, еще ранее о том, что наивно считать математику отражением материального мира или же некоторой реальности в духе Платона, писал Й. Рав, который рассматривал математическую деятельность как своего рода искусство, приобретающее характер объективности посредством социального взаимодействия тех, кто его производит [Rav 1989, 61–62].

Исследования последнего десятилетия в области когнитивной нейронауки позволяют существенно уточнить детали того, как математика связана с нашим мозгом и сознанием[1].

Исходная точка развития математики: феномен «чувства числа». Это уточнение связано с открытием феномена, получившего название (если не вдаваться в тонкости интерпретации содержания понятий) «чувство числа», процесс субитации (number sense, numerosity, subitizing). Этот феномен свидетельствует об усилении натуралистических тенденций в философии математики[2]. Хотя рассмотрение природы числа вовлекает, как будет показано ниже, и соображения, относящиеся к социоцентризму, который подчеркивает важность социокультурных факторов в освоении числовой и представленной в дигитальных процедурах производства информации и оперировании современными математическими понятиями. В частности, это касается открытия и придания общезначимого статуса образу числовой прямой – изображение множества чисел в виде непрерывной линии, простирающейся от минус до плюс бесконечности [Nunez 2011, 657].

Суть «чувства числа», феномена субитации состоит в том, что способность симультанно воспринимать и различать небольшие количества (от одного до примерно четырех) в силу их важности для сохранения жизни и устойчивого функционирования системы является имманентным, врожденным продуктом эволюции живого и, таким образом, универсальным, сквозным свойством любого более или менее развитого организма, детерминированным онтогенетически – от муравьев и рыбок гуппи до человеческого младенца, который уже в возрасте нескольких месяцев обычно способен совершать простейшие протоарифметические операции «сложения» и «вычитания» нескольких предметов [Tosto et al. 2014; Agrillo, Bisazza 2017; Agrillo, Bisazza et al. 2018; Hannagan et al. 2018, 18][3]. Этот феномен заставляет вспомнить учение И. Канта об априоризме, переосмысленное, разумеется, в терминах современной когнитивной нейронауки.

В понятие «чувство числа» и представителями когнитивных наук, и педагогами, занятыми анализом и совершенствованием математического образования, вкладывается довольно широкий спектр значений. Если иметь в виду своего рода «жесткое ядро» данного понятия, то это не только способность симультанно воспринимать небольшие количества (предметов), но и сравнивать их с точки зрения различия единиц и порядка расположения, совершать простейшие арифметические операции (типа сложения и/или вычитания), понимать значения цифр, осознавать степень соответствия или несоответствия чисел количеству реальных вещей (репрезентативный аспект), ошибки в восприятии числовых величин, а также местонахождение чисел на (ментальной) числовой оси.

«Чувство числа» может совершенствоваться: способность различать близко расположенные числа по мере взросления увеличивается, подчиняясь закону Вебера – Фехнера (причем ошибки при различении логарифмически зависят не от абсолютных значений величин множеств сравниваемых предметов, а от их соотношения – чем больше элементов множества, тем с меньшей точностью могут быть установлены их соотношения). Наличие такого рода способности, между тем, вовсе не означает, что в любом человеческом сообществе имеется и развита категория числительных в языке. Племена, до сих пор находящиеся на примитивном уровне развития, вполне обходятся без сколько-нибудь развитых категорий числительных (десятки языков австралийских племен подобного не имеют). Это своего рода «нечисловые» культуры, представители которых испытывают значительные сложности при необходимости вести счет и устанавливать точное количество объектов. В то же время данные «нечисловые» сообщества, которые до сих пор обитают также, например, в дельте реки Амазонки, могут быть очень хорошо адаптированы к окружающей среде, составляя с ней одно целое.

Понятие «целого числа» возникает в продвинутых культурах, которые используют достаточно сложные языки. Как замечал еще К. Поппер, «натуральные числа – итог деятельности человека, продукт человеческого языка и человеческого мышления» (цит. по: [Dehaene 2011, 117]). Число вообще и целое (натуральное) число в частности оказывается результатом взаимодействия прото-дигитальной интуиции, связанной с феноменом субитации, и культурных традиций, характерных для «числовых» сообществ, специально обучающих детей счету и работе с точными числовыми величинами[4]. Такого рода обучение считается важным элементом подготовки к школе, которое впоследствии существенно облегчает восприятие математических конструкций и усвоение математических операций [Sarnecka, Wright 2013, 9; Tosto, Petrill et al. 2017, 1936].

Нейрофизиологическая основа «чувства числа» – это активность прежде всего такой области мозга как внутритеменная борозда теменной доли [Nieder, Dehaene 2009, 187;

Hyde 2015, 561; Lyons 2015, 476]. Здесь «обслуживается» одна (из, как считается, *двух*) когнитивных систем, связанных с математическими способностями. Эта система функционирует вне зависимости от культуры и языка. Она предполагает приближенную и несимволическую оценку количеств, и здесь происходят элементарные процедуры сравнения и такие операции, как сложение и вычитание, – собственно то, что принято относить к феномену субитации. Символическая и несимволическая (числовая) информация кодируются в мозге различными способами, причем натуральные и рациональные дробные числа обрабатываются мозгом при помощи различных механизмов [Monti et al. 2012, 3; DeWolf et al. 2016, 310]. Кардинальные (типа 3, 5, 7) и ординальные (типа 5 больше 3) числа также предполагают различные способы работы мозга: определить тот факт, что 3 меньше 7 оказалось задачей, отличной от определения того факта, что 7 следует за 3 [Nieder, Dehaene 2009, 202].

Вторая же система предполагает символьный и языковой формат представления информации; она генерируется культурой (имеется в виду и процесс обучения на различных этапах жизни человека) и позволяет совершать все известные нам математические операции [Dehaene 2011, 36–38]. Лингвистические и математические способности локализуются в различных участках мозга и, строго говоря, не связаны: потеря или нарушение речи вовсе не влечет за собой нарушение математических способностей. Именно эта когнитивная система, по-видимому, прежде всего ответственна за свойство пластичности мозга. Совокупности нейронов, которые возбуждаются при обработке числовой информации, предложено называть «нумеронами» [Gallistel 2018, 2], хотя и следует отдавать отчет в условности такого рода названия.

«Чувство числа» и язык. При функционировании живых систем оценка количества тех или иных объектов играет важную роль; и выражается это не только в своего рода «онтологии» (архитектонике) мозга, но и в языке. Лингвистами и нейробиологами замечено, что понятия, выражающие числительные в различных языках, являются наиболее устойчивыми, «консервативными» (при всех метаморфозах, которые могут произойти с языком). В индоевропейском семействе языков они принадлежат примерно десяти наиболее медленно меняющимся словам [Butterworth et al. 2018, 1; Pagel, Meade 2018, 2]. Вероятно, именно язык открывает возможность интеграции упомянутых выше систем кодирования мозгом информации [Hiraiwa 2017, 2].

Несмотря на априорный характер «чувства числа», само число нуждается в лингвистическом оформлении и оказывается производным от процесса аккультурации этого чувства, благодаря которому оно получает понятийную и символическую репрезентацию. По существу, здесь следует говорить о результате действия метода, который предполагает трансцендентализм деятельностного типа. Стартовая позиция процедур счета, как известно, связана с непосредственной деятельностью, которая может вовлекать человеческие конечности (пальцы, руки) в сопоставление их количеств с некоторыми множествами предметов. Неслучайно наиболее распространены языки с пятеричными и десятичными системами счисления. В английском языке понятие digit (отсюда «дигитальный» для обозначения цифровых систем и операций) тождественно понятию руки (hand).

Дискретный характер естественных языков коррелируется с дискретной системой натуральных чисел. Большие числа – порождение уже развитых культур и цивилизаций. Это своеобразное и очень ценное культурное достояние, приобретенное на довольно высоких стадиях совершенствования рационального мышления и открывающее им перспективы научного и технологического прогресса.

Стоит обратить внимание на то обстоятельство, что наша лексическая система и система обозначения числительных существенно различны: первая является мультипликативно-аддитивной («сто [И] тридцать семь»), приспособленной прежде всего для устной коммуникации, а вторая позиционной («137»), приспособленной для преодоления ограничений нашего непосредственного синтаксического анализа в ходе зрительного восприятия и для быстрого чтения соответствующих символов. Непозиционная (римская) нотация чисел уступила место позиционной именно ввиду значительно большей сложности процедур с числами, изображение которых лишено позиционности.

Особенности языков влияют и на своего рода «оперативный» объем памяти. Если у носителей большинства индоевропейских языков этот объем в среднем равен семи единицам, то у китайцев он в среднем составляет девять единиц. Данный факт не свидетельствует о том, что китайцы в среднем умнее европейцев, а – в случае числительных – о более «компактных» в китайском нежели в индоевропейских языках обозначениях для числительных и, стало быть, временем, которое затрачивается для того, чтобы их произнести [Dehaene 2011, 102]. Корреляция между длиной слова и объемом «оперативной» памяти является довольно выраженной для наиболее распространенных в мире языков.

Математика и культура. «Чувство числа» является врожденным (innate) и, следовательно, в известном смысле априорным при любой познавательной деятельности. Неслучайно ведущие ученые в области когнитивной нейронауки объявляют свою программу изучения архитектоники мозга, ответственной за вычислительные операции, «кантианской исследовательской программой» [Gallistel, Gelman 1992; Dehaene, Brannon 2010] и говорят о «кантовском» мозге [Fazelpour, Thompson 2015]. Конечно, речь идет не о буквальном следовании кантовской идее априоризма (и, разумеется, не о мозге Канта как таковом), но о том, что ряд моментов кантовской философии оказывается созвучен самым современным представлениям о ключевых механизмах функционирования мозга в качестве фундамента когнитивных систем живых организмов.

Признание «чувства числа» по существу является антитезой для идеи Ж. Пиаже о последовательной когнитивной эволюции интеллекта, поскольку это чувство уже является стартовой точкой данного процесса; это та элементарная клеточка, из которой вырастают сложные компоненты (математического) интеллекта. Его можно назвать своего рода базисом абстрактного мышления, которое способно генерировать понятия, представления и операции с числовой и символической информацией все более и более высокого уровня. Думается, что здесь уместна аналогия с игрой «Лего»: маленькие лего-фигурки (или лего-модули) позволяют собирать самые разнообразные предметы, которые иногда представляют собой весьма сложные конструкции. Или же – если угодна аналогия из логико-математической области – с простейшим устройством, так называемой машиной Тьюринга, которая позволяет реализовывать алгоритмы сколь угодно сложной природы. Вероятно, также возможна апелляция к картине создания снежного кома, который формируется из множества крошечных снежинок. Нередко образ и функционирование мозга уподобляют компьютеру. Если принять эту метафору ракурса, то речь должна идти не о цифровом компьютере дискретного действия, оперирующем числовыми или символическими переменными, а об аналоговом устройстве, которое обрабатывает непрерывный поток поступающей информации.

Развитие абстрактных разделов математического знания может быть описано в общем виде с помощью понятий, восходящих к колмогоровской теории сложности: с психологической точки зрения сложность восприятия математических конструкций может быть связана со сложностью определения, запоминания и оперирования теми или иными математическими представлениями. Сложность здесь измеряется наиболее коротким из всех возможных определений данного математического конструкта, доступным для начала его применения [Sigman 2004, 1265–1266].

Восхождение на более высокие уровни абстракций происходит благодаря действию культурных механизмов, сопряженных с математическим творчеством и способствующих обогащению математической интуиции. Дело в том, что наглядное (геометрическое) изображение множества чисел в виде натурального ряда, расположенного на числовой оси, – это достижение XVII в., а свой общезначимый статус оно приобрело только в начале XX в. Даже у Р. Декарта, объединившего арифметику и геометрию, открывшего систему координат и тем самым создавшего аналитическую геометрию, отсутствовало «линейное» изображение чисел (в виде известной и, кажется, интуитивно очевидной *числовой прямой*). Числовая прямая, фактически, была введена Дж. Непером в «Описании удивительной таблицы логарифмов» 1614 г. и Дж. Уоллисом в «Трактате по алгебре» 1685 г. Только с этого момента числовая прямая (числовая ось) начала свой путь в качестве элемента культуры вообще, который дает простой и интуитивно очевидный, геометрический образ множества чисел. Числа погружаются в линейное пространство. Этот образ ныне усваивается уже на первых шагах обучения арифметике и представляется естественным, объективно заданным самой природой числа. История математики показывает, что это вовсе не естественное ментальное образование, а по существу культурный артефакт, превратившийся по мере развития математического анализа и теории множеств в силу своей наглядности в, казалось бы, предзаданную (и тем самым естественную) репрезентацию.

Аналогична ситуация с числом «ноль». Его открытие также является достижением определенной культуры, причем это число также было ассимилировано европейской математикой примерно в XVII столетии (хотя в индийской математике оно было введено Брахмагуптой в VII в. (см.: [Nieder 2016, 833])). Это обстоятельство способствовало экспансии позиционной системы счисления. Однако и в случае данного числа можно говорить о наличии своего рода универсальных для живых систем нейрофизиологических предпосылках, которые необходимо иметь в виду при анализе процесса его формирования как культурного артефакта [Nieder 2018, 1069].

Культурный контекст уже несколько десятилетий широко исследуется в ***этно***математике, которая фокусирует внимание на особенностях эволюции математического мышления в различных культурах [D'Ambrosio 2018]. Этноматематика демонстрирует многообразие траекторий эволюции математического мышления у различных народов в различные исторические периоды.

Необходимо также упомянуть экспериментальные свидетельства, полученные методами функциональной магнитно-резонансной томографии, о том, что в различных культурах (западных – «индивидуалистических» и восточных – «коллективистских») при одних и тех же арифметических операциях возбуждаются различные области мозга [Tang, Zhang et al. 2006]. Ученые полагают, что это обусловлено разными методами обучения началам арифметики. В восточных культурах значительная роль отводится операциям, которые совершаются с помощью абака, предполагающим визуальные и механические навыки; в западных же культурах бóльшее внимание уделяется алгоритмическим процедурам и, следовательно, навыкам аналитического рассуждения. В раннем детстве не наблюдается никаких значимых различий в математических способностях мальчиков и девочек [Kersy, Braham et al. 2018, 7]. Эти различия, однако, постепенно возникают в силу культурных факторов, характерных для конкретного гендера: мальчики и девочки воспитываются по-разному – учитывая отличия в социальных ролях в будущем (обычно считается, что математика менее важна для девочек, нежели для мальчиков).

Математика – важный компонент культуры, причем раннее обучение математике, как свидетельствует многолетний опыт, в значительной степени определяет успех индивидуума в жизни, а низкий уровень математических знаний граждан сопряжен с существенными потерями в темпе общественного развития [Ansari, De Smedt, Grabner 2012, 117]. Здесь можно наблюдать проявление биокультурного со-конструктивизма: математические способности способствуют росту культуры, а культура в свою очередь детерминирует повышение уровня математического потенциала людей в буквальном смысле на нейрофизиологическом уровне (речь о «второй системе» мозга, связанной с символьным и языковым форматом представления и обработки информации) [Бажанов 2018].

Если вернуться к дискуссии реализма (платонизма) и антиреализма (номинализма) в философии математики, которая упоминалась в начале статьи, то, как мне кажется, приведенные в ней эмпирические факты достаточно убедительно свидетельствуют в пользу понимания природы математики в духе антиреализма – предполагается анализ формирования базисных математических понятий в контексте человеческой деятельности, характерной для определенной культуры. «Формальные идеи в математике –

замечает М. Сигман, – это не произвольные конструкции случайной (arbitrary) архитектуры; они – результат работы мозга… Поэтому натуралистический подход к природе математики более перспективен, чем ее понимание под углом зрения платонизма <…> математика не просто поможет нам понять биологию; она есть сама биология» [Sigman 2004, 1266].

Наконец, стоит обратить внимание, что феномен «чувства числа» как фундамент математического познания наиболее адекватно описывается в представлениях, типичных для философских оснований математического интуиционизма Л.Э.Я. Брауэра [Graziano 2013, 75–76; Graziano 2014, 366–369]. Исследователь разделял математическое творчество и язык, полагая, что математика относится к сфере внеязыковой деятельности мозга и имеет фундамент в виде восприятия феномена времени, составляющий глубокий базис математической интуиции. Впрочем, взгляды Брауэра (и таких выдающихся математиков как А. Пуанкаре, и Г. Вейля) в определенном смысле явились развитием и «уточнением» идей И. Канта, когда понятие интуиции «реконфигурируется» и становится более абстрактным, поскольку не сводится к представлениям о пространстве (и его геометрических свойствах). Придавая времени статус фундаментального понятия в философии математики интуиционизма, Брауэр опирается исключительно на априорную интуицию времени, приписывает времени свойство бесконечности и интерпретирует интуицию времени в качестве связующего звена между различными фрагментами опыта.

Примечания

[1] В частности, ныне принято говорить в определенном смысле об «энактивированном» (embodied) мозге [Kiverstein, Miller 2015] и, соответственно, о таком новом направлении развития науки как «культурная биология» (Cultural-Biology) в основе которой лежат идеи молекулярных аутопоэтических систем, развивающихся в некотором культурном пространстве [Maturana, Davila, Munoz 2016].

[2] Тем не менее предпринимаются попытки и его иного понимания – в контексте традиционных подходов в философии математики [Marshall 2018, 2].

[3] Аналогичные способности касаются и некоторых простейших геометрических конфигураций [Amalric, Wang et al. 2017].

[4] Примерно 5–7% взрослых людей так и не приобретают навыки сколько-нибудь сложного счета: они страдают патологией, называемой «дискалькулией», которая возникает в силу особенностей строения и функционирования их мозга (точнее, внутритеменной борозды затылочно-теменного стыка).

Ссылки – References in Russian

Бажанов 2014 – *Бажанов В.А.* Разновидности и противостояние реализма и антиреализма в философии математики. Возможна ли третья линия? // Вопросы философии. 2014. № 5. С. 52–64.

Бажанов 2018 – *Бажанов В.А.* Социум и мозг: биокультурный со-конструктивизм // Вопросы философии. 2018. № 2. С. 78–88.

Князева 2014 – *Князева Е.Н.* Энактивизм: новая форма конструктивизма в эпистемологии. М.; СПб.: ЦГИ: Университетская книга, 2014.

Лакофф, Нуньес 2012 – *Лакофф Дж., Нуньес Р.* Откуда взялась математика: как разум во плоти создает математику // Горизонты когнитивной психологии / Под ред. В.Ф. Спиридонова, М.В. Фаликман. М.: Языки славянских культур: РГГУ, 2012. С. 29–48.

References

Agrillo, Christian, Bisazza, Angelo (2017) “Understanding the Origin of Number Sense: a Review of Fish Studies”, *Philosophical Transactions B*, 373.

Agrillo, Christian, Piffer, Laura, Bisazza, Angelo, Butterworth, Brian (2012) “Evidence for Two Numerical Systems that are Similar in Humans and Guppies”, *PLoS One*, 7 (2), e31923.

Amalric, Marie, Wang, Liping, Pica, Pierre, Figueira, Santiago, Sigman, Mariano, Dehaene, Stanislas (2017) “The Language of Geometry: Fast Comprehension of Geometrical Primitives and Rules in Human Adults and Preschoolers”, *PLoS Computational Biology*, 13 (1), e1005273.

Ansari, Daniel, De Smedt, Bert, Grabner, Roland H. (2012) “Introduction to the Special Section on *Numerical and Mathematical Processing*”, *Mind, Brain, and Education*, 6, 3, pp. 117–118.

Atiyah, Michaek (2008) “Thoughts of a Mathematician”, *Brain*, 131, pp. 1156–1160.

Bazhanov, Valentin A. (2014) “Varieties and Opposition of Realism and Anti-Realism in the Philosophy of Mathematics. Is a Third Line Possible?”, *Voprosy Filosofii*, Vol. 5 (2014), pp. 52–64 (in Russian).

Bazhanov, Valentin A. (2018) “Society and the Brain: Biocultural Co-Constructivism”, *Voprosy Filosofii*, Vol. 2 (2018), pp. 78–88 (in Russian).

Burr, David C. (2017) “Evidence for the Number Sense”, *Behavioral and Brian Sciences*, 40, pp. 18–19.

Butterworth, Brian, Gallistel, Charles R., Vallortigara, Giorgio (2018) “Introduction: The Origin of Numerical Abilities”, *Philosophical Transactions B*, 373.

D’Ambrosio, Ubiratan (2018) “The Program of Ethnomathematics: Cognitive, Anthropological, Historical and Socio-Cultural Bases”, *PNAS*, 12 (4), pp. 229–247.

Dehaene, Stanislas (2011) *The Number Sense. How the Mind Creates Mathematics, Revised and Updated Edition*, Oxford University Press, New York.

Dehaene, Stanislas, Brannon, Elizabeth (2010) “Space, Time, and Number: a Kantian Research Program”, *Trends in Cognitive Science,* 14, 2, pp. 517–519.

DeWolf, Melissa, Chiang, Jeffrey N., Bassok, Miriam, Holyoak, Keith J., Monti, Martin M. (2016) “Neural Representations of Magnitude for Natural and Rational Numbers”, *NeuroImage*, 141, pp. 304–312.

Fazelpour, Thompson 2015 – Fazelpour, Sina, Thompson, Evan (2015) “The Kantian Brain: Brain Dynamics from a Neurophenomenological Perspective”, *Current Opinion in Neurobiology*, 31, pp. 223–229.

Gallistel, Charles R. (2018) “Finding Numbers in the Brain”, *Philosophical Transactions B,* 373, 20170119.

Gallistel, Charles R., Gelman, Rochel (1992) “Preverbal and Verbal Counting and Computation”, *Cognition*, 44, pp. 43–74.

Graziano, Mario (2013) “Between Intuitionism and Cognitive Science”, *Reti, Saperi, Linguaggi*, 2, 2, pp. 72–79.

Graziano, Mario (2014) “Numerical Cognition and Philosophy of Mathematics. Dehaene’s (Neuro)intuitionism and the Relevance of Language”, *RIFL/SFL,* pp. 362–377.

Hannagan, Thomas, Nieder, Andreas, Viswanathan, Pooja, Dehaene, Stanislas (2018) “A Random-Matrix Theory of the Number Sense”, *Philosophical Transactions B*, 373.

Hiraiwa, Ken (2017) “The Faculty of Language Integrates the Two Core Systems of Number”, *Frontiers in Psychology*, 8, 351.

Hyde, David C. (2015) “Numerosity”, *Brain Mapping: An Encyclopedic Reference*, 3, pp. 559–564.

Kersy, Alissa J., Braham, Emily J., Csumitta Kelsey D., Libertus, Melissa E., Cantlon, Jessica F. (2018) “No Intrinsic Gender Differences in Children’s Earliest Numerical Abilities”, *NPJ Science of Learning*, 3, 12.

Kiverstein, Julian, Miller, Mark (2015) “The Embodied Brain: Towards a Radical Embodied Cognitive Neuroscience”, *Frontiers in Human Neuroscience*, 9, 237.

Knyazeva, Elena N. (2014) *Enactivism: A New Form of Constructivism in Epistemology*, TsGI, Universitetskaya kniga, Moscow, St. Petersburg (in Russian).

Lakoff, George, Nunez, Rafael (2000) “Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being”, Basic book, New York (Russian Translation, 2012).

Leibovich, Tali, Katzin, Naama, Harel, Maayan, Henik, Avishai (2017) “From *Sense of Number* to *Sense of Magnitude*: the Role of Continuous Magnitudes in Numerical Cognition”, *Behavioral and Brian Sciences*, pp. 1–16.

Lyons, Ian M., Ansari, Daniel, Beilock, Sian L. (2015) “Qualitatively Different Coding of Symbolic and Nonsymbolic Numbers in the Human Brain”, *Human Brain Mapping*, 36, 2, pp. 475–488.

Marshall, Oliver R. (2018) “The Psychology and Philosophy of Natural Numbers”, *Philosophia Mathematica*, 26, 1, pp. 40–58.

Maturana, Humberto, Davila, Yanez X., Munoz, Ramirez (2016) “Cultural-Biology: Systemic Consequences of Our Evolutionary Drift as Molecular Autopoietic Systems”, *Foundations of Science*, 21, 4, pp. 631–678.

Monti, Martin M., Parsons, Lawrence M., Ocherson, Daniel N. (2012) “Thought Beyond Language: Neural Dissociation of Algebra and Natural Language”, *Psychological Science*, XX (X), pp. 1–9.

Nieder, Andreas (2016) “Represinting Something Out of Nothing: the Dawning of Zero”, *Trends in Cognitive Science,* 20, 11, pp. 830–842.

Nieder, Andreas (2018) “Honey Bees Zero in on the Empty Set”, *Science*, 360, 6393, pp. 1069–1070.

Nieder, Andreas, Dehaene, Stanislas (2009) “Representation of Number in the Brain”, *Annual Review of Neuroscience,* 32 (1), pp. 185–208.

Nunez, Rafael E. (2011) “No Innate Number Line in the Human Brain”, *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 42 (4), pp. 651–668.

Pagel, Mark, Meade, Andrew (2018) “The Deep History of the Number Words”, *Philosophical Transactions B*, 373, 1740.

Rav, Yehuda (1989) “Philosophical Problems of Mathematics in the Light of Evolutionary Epistemology”, *Philosophica*, 43, 4, pp. 49–78.

Sarnecka, Barbara W., Wright, Charles E. (2013) “The Idea of an Exact Number: Children’s Understanding of Cardinality and Equinumerosity”, *Cognitive Science*, 37 (8), pp. 1493–1506.

Sigman, Mariano (2004) “Bridging Psychlogy and Mathematics: Can the Brain Understand the Brain?”, *PLoS Biology*, 2, 9, pp. 1265–1266.

Dehaene, Stanislas, Brannon, Elizabeth (eds.) (2011) *Space, Time and Number in the Brain: Searching for the Foundations of Mathematical Thought,* Academic press, London.

Tang, Yiyuan, Zhang, Wutian, Chen, Kewei, Feng, Shigang, Ji, Ye, Shen, Junxian, Reiman, Eric M., Liu, Yijun (2006) “Arithmetic Processing in the Brain Shaped by Cultures”, *PNAS*, 103, 28, pp. 10775–19780.

Tosto, Maria G., Petrill, Stephen, Halberda, Justin et al. (2014) “Why We Differ in Number Sense? Evidence from the Genetically Sensitive Investigations”, *Intelligence*, 43 (100), pp. 35–46.

Tosto, Maria G., Petrill, Stephen, Malykh, Sergey, Malki, Karim, Haworth, Clairie M.A., Mazzocco, Michele M.M., Thompson, Lee, Opfer, John, Bogdanova, Olga Y. (2017) “Number Sense and Mathematics: Which, When and How?”, *Developmental Psychology*, 53, 10, pp. 1924–1939.

Voorhees, Burton (2004) “Embodied Mathematics. Comments on Lakoff & Nunez”, *Journal of Consciousness Studies*, 11, 9, pp. 83–88.

Сведения об авторе

БАЖАНОВ Валентин Александрович –
доктор философских наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ, действительный
член Académie Internationale de Philosophie
des Sciences, завкафедрой философии
Ульяновского государственного университета;
главный научный сотрудник лаборатории
«Кантианская рациональность», Академия
Кантиана, Институт гуманитарных наук,
Балтийский федеральный университет
им. И. Канта.

Author’s Imformation

BAZHANOV Valentin A. –
DSc in Philosophy, Professor, Honored Scientist
of the Russian Federation, Current Member
of the Académie Internationale de Philosophie
des Sciences, Head of the Department of Philosophy,
Ulyanovsk State University, Key researcher,
Kantian Rationality Lab & Academia Kantiana,
Immanuel Kant Baltic Federal University (IKBFU).